

Tugas Analisis Vektor (C)

- 7). (B) Dapatkan unit vektor singgung pada kurva?
 $x = t$ $y = t^2$ $z = t^3$, pada titik dimana $t = 1$

$$r(t) = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$$

$$r'(t) = \hat{i} + 2t\hat{j} + 3t^2\hat{k}$$

$$r'(1) = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

misal $p(t) = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

Vektor satuan $S(t) = \frac{p(t)}{|p(t)|}$

$$\begin{aligned} * |p(t)| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{1 + 4 + 9} \\ &= \sqrt{14} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}} [\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}]$$

Jadi, unit vektor singgung pada $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ pada $t = 1$

adalah $S(t) = \frac{1}{\sqrt{14}} [\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}]$

- 8) Carilah vektor singgung satuan $T(t)$ di titik dengan nilai parameter t

b). $r(t) = t\hat{i} + 2\sin t\hat{j} + 3\cos t\hat{k}$, $t = \frac{\pi}{6}$

$$r'(t) = \hat{i} + 2\cos t\hat{j} - 3\sin t\hat{k}$$

$$r'(\frac{\pi}{6}) = \hat{i} + \sqrt{3}\hat{j} - \frac{3}{2}\hat{k}$$

$$S(t) = \frac{2}{5} [\hat{i} + \sqrt{3}\hat{j} - \frac{3}{2}\hat{k}]$$

Jadi vektor singgungnya pada $t = \frac{\pi}{6}$ adalah $S(t) = \frac{2}{5} [\hat{i} + \frac{2\sqrt{3}}{5}\hat{j} - \frac{3}{5}\hat{k}]$

c). $r(t) = e^{2t}\cos t\hat{i} + e^{2t}\sin t\hat{j} + e^{2t}\hat{k}$, $t = \frac{\pi}{2}$

$$r'(t) = (2e^{2t}\cos t - e^{2t}\sin t)\hat{i} + (2e^{2t}\sin t + e^{2t}\cos t)\hat{j} + 2e^{2t}\hat{k}$$

$$r'(\frac{\pi}{2}) = (2e^{\pi}(0) - e^{\pi}(1))\hat{i} + (2e^{\pi}(1) + e^{\pi}(0))\hat{j} + 2e^{\pi}\hat{k}$$

$$= -e^{\pi}\hat{i} + 2e^{\pi}\hat{j} + 2e^{\pi}\hat{k}$$

Jadi, vektor singgungnya pada $t = \frac{\pi}{2}$ adalah $S(t) = \frac{1}{3e^{\pi}} [-e^{\pi}\hat{i} + 2e^{\pi}\hat{j} + 2e^{\pi}\hat{k}]$

9). Tentukan unit vektor singgung di suatu titik pada kurva

$$x = t^2 + 1 ; y = 4t - 3 ; z = 2t^2 - 6t \quad \text{saat } t = 2$$

$$r(t) = (t^2 + 1)\hat{i} + (4t - 3)\hat{j} + (2t^2 - 6t)\hat{k}$$

$$r'(t) = 2t\hat{i} + 4\hat{j} + (4t - 6)\hat{k}$$

$$r'(2) = 4\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$|r'(t)| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{36}$$

$$= 6$$

Jadi, unit vektor singgung adalah

$$s(t) = \frac{1}{6} [4\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}]$$

$$s(t) = \frac{1}{3} [2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}]$$

$$= \frac{2}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{1}{3}\hat{k}$$

4). Jika diketahui $u(t) = t\hat{i} + 2t^2\hat{k}$, $v(t) = t^3\hat{j} + t\hat{k}$, $w(t) = \hat{i} + t\hat{j} + t^2\hat{k}$,
dapatkan :

b). $[(u + 2v) \cdot w]'$

$$\Rightarrow u + 2v = (t, 0, 2t^2) + (0, 2t^3, 2t)$$

$$= (t, 2t^3, 2t^2 + 2t)$$

$$\Rightarrow (u + 2v) \cdot w = (t, 2t^3, 2t^2 + 2t) \cdot (1, t, t^2)$$

$$= t + 2t^4 + 2t^4 + 2t^3$$

$$[(u + 2v) \cdot w]' = [4t^4 + 2t^3 + t]'$$

$$= 16t^3 + 6t^2 + 1$$

c). $[(u \times v) \times w]'$

$$u \times v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ t & 0 & 2t^2 \\ 0 & t^3 & t \end{vmatrix} = t^1\hat{k} - t^2\hat{j} - 2t^5\hat{i}$$

$$(u \times v) \times w = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2t^5 & -t^2 & t^1 \\ 1 & t & t^2 \end{vmatrix}$$

$$= -t^4\hat{i} + t^4\hat{j} - 2t^6\hat{k} + 2t^7\hat{j} - t^5\hat{i} + t^2\hat{k}$$

$$(u \times v) \times w = (-t^4 - t^5) \hat{i} + (2t^7 + t^4) \hat{j} + (-2t^6 + t^2) \hat{k}$$

$$[(u \times v) \times w] = (-4t^3 - 5t^4) \hat{i} + (14t^6 + 4t^3) \hat{j} + (-12t^5 + 2t) \hat{k}$$

$$=$$

(A)

8). Perhatikan bahwa dengan persamaan parametrik $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$ terletak pada kerucut $z^2 = x^2 + y^2$. Gunakan fakta ini untuk membantu membuat sketsa kurva vektornya!

Jawab = untuk membuktikan persamaan parametrik tersebut terletak pada kerucut $z^2 = x^2 + y^2$, substitusikan persamaan satu ke persamaan lainnya.

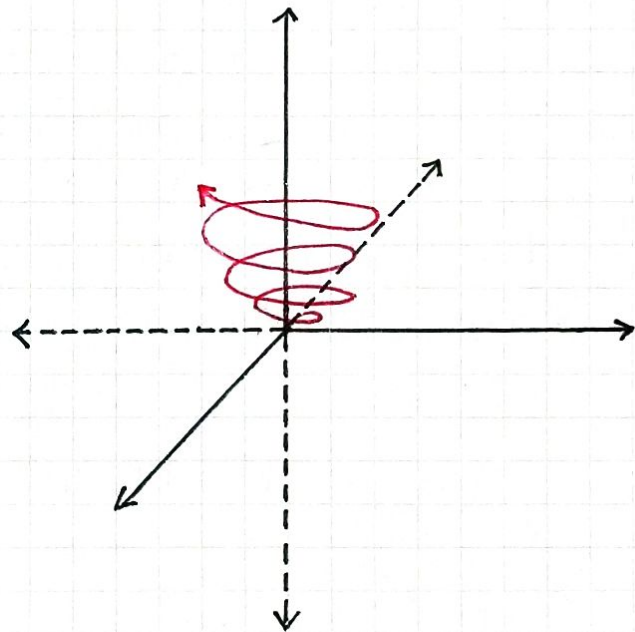
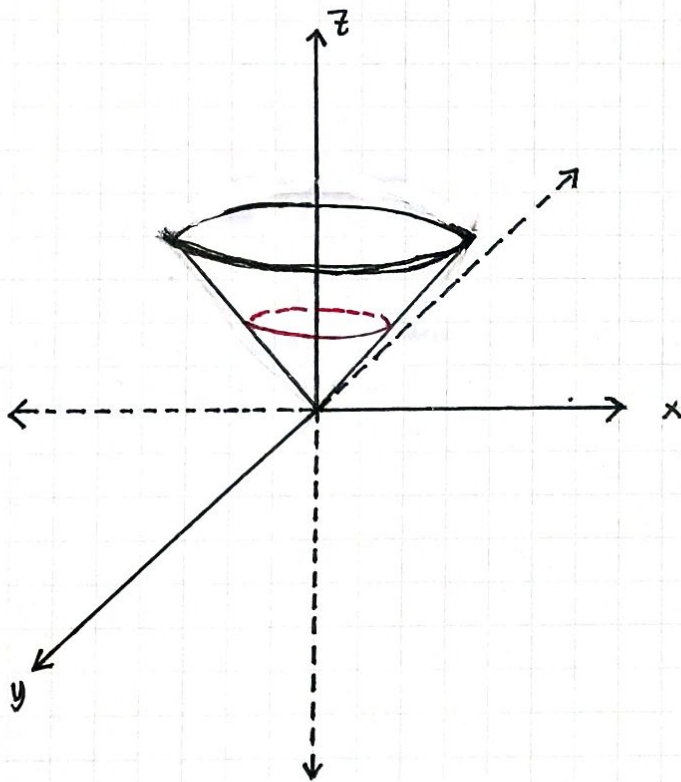
$$\Rightarrow z^2 = (t \cos t)^2 + (t \sin t)^2$$

$$t^2 = t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t$$

$$t^2 = t^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)$$

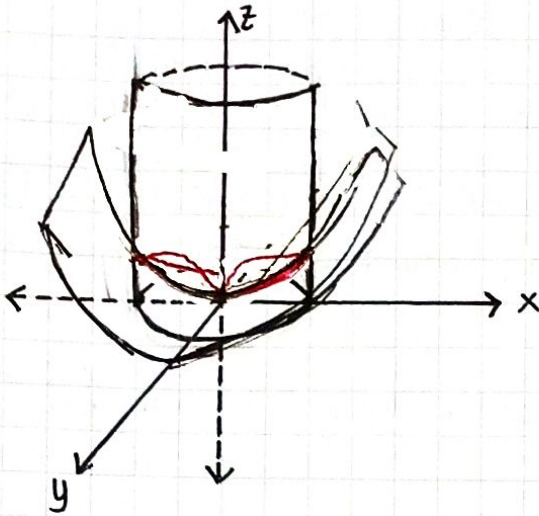
$$t^2 = t^2 \quad (\text{Terbukti pers. parametrik tsb terletak pada kerucut } z^2 = x^2 + y^2)$$

► Sketsa Kerucut

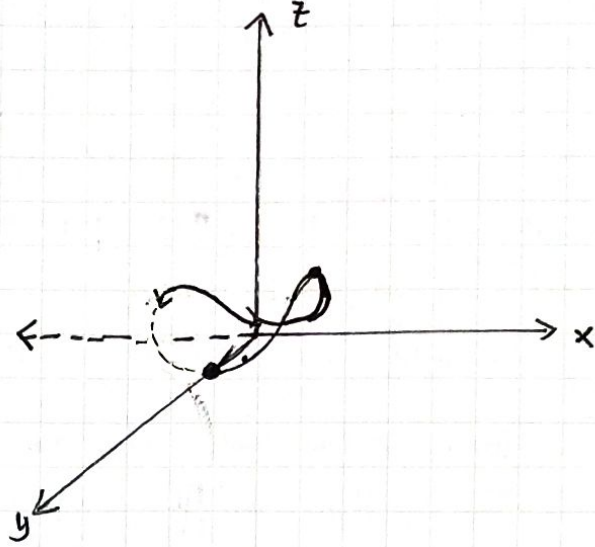


- 9). Perhatikan bahwa dengan persamaan parametrik $x = \sin t$; $y = \cos t$; $z = \sin^2 t$ adalah kurva perpotongan dari permukaan $z = x^2$ dan $x^2 + y^2 = 1$. Gunakan fakta ini untuk membantu membuat sketsa kurva vektornya!

→ Gambar Kurva :



→ Gambar Kurva vektor



- 10). Dapatkan fungsi vektor yang menyatakan kurva perpotongan kedua permukaan :

a). Silinder $x^2 + y^2 = 4$ dan $z = xy$

$$x = 2\sin t \quad ; \quad y = 2\cos t \quad ; \quad z = 4\sin t \cos t \\ = 2\sin 2t$$

Pembuktian : $x^2 + y^2 = 4$

$$(2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 = 4$$

$$4\sin^2 t + 4\cos^2 t = 4$$

$$4(\sin^2 t + \cos^2 t) = 4 \quad \dots (1)$$

$$4 = 4$$

$$z = xy$$

$$= 2\sin t \cdot 2\cos t$$

$$= 2 \cdot 2\sin t \cos t$$

$$= 2\sin 2t \quad \dots (2)$$

Dari (1) dan (2) terbukti bahwa $x = 2\sin t$, $y = 2\cos t$, dan $z = 2\sin 2t$ merupakan fungsi parametrik yang menyatakan kurva perpotongan $x^2 + y^2 = 4$ dan $z = xy$

⇒ Jawab = Fungsi vektor : $r(t) = (2\sin t, 2\cos t, 2\sin 2t)$

10). b. Kerucut $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $z = 1 + y$

$$x = \sqrt{2\sin t + 1} ; y = \sin t ; z = 1 + \sin t$$

Pembuktian :

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{2\sin t + 1})^2 + (\sin t)^2} \\ &= \sqrt{2\sin t + 1 + \sin^2 t} \\ &= \sqrt{(\sin t + 1)^2} \\ &= \sin t + 1 \quad (\text{Terbukti}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Jawab = Fungsi vektor : $r(t) = (\sqrt{2\sin t + 1}, \sin t, 1 + \sin t)$

c). Paraboloida $z = 4x^2 + y^2$ dan silinder parabolik $y = x^2$

$$x = \sin t ; y = \sin^2 t ; z = 4\sin^2 t + \sin^4 t$$

Pembuktian :

$$\begin{aligned} z &= 4x^2 + y^2 \\ &= 4(\sin t)^2 + (\sin^2 t)^2 \\ &= 4\sin^2 t + \sin^4 t \quad (\text{terbukti}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Jawab : Fungsi vektor : $r(t) = (\sin t, \sin^2 t, 4\sin^2 t + \sin^4 t)$